Cours de Mathématiques 2
première partie : Analyse 2

DEUG MIAS 1^e année, 2^e semestre.

Maximilian F. Hasler

Département Scientifique Interfacultaire

B.P. 7209 — F–97275 SCHOELCHER CEDEX

Fax : 0596 72 73 62 — e-mail : mhasler@univ-ag.fr

version du 21 avril 2002

Table des matières

1 Fonctions négligeables et équivalentes ; développements limités

La notion de fonctions équivalentes devrait être connue du cours d'Analyse 1, sous la forme $f \underset{(a)}{\sim} g \iff \lim\limits_a \frac{f}{g} = 1$. On la réintroduit ici en utilisant la nouvelle notion de fonctions négligeables, qui est très utile notamment dans le cadre des développements limités.

1.1 Fonctions négligeables

Dans ce qui suit, on considère des fonctions $f, g, \ldots$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définis sur un voisinage pointé V d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, c'est-à-dire au voisinage de a sauf eventuellement en ce point même. (On rappelle que $\{]M, \infty[\,; M \in \mathbb{R}\}$ constitue une base de voisinages de $a = \infty$).

Pour ne pas trop alourdir les notations, on convient qu'une égalité entre fonctions sous-entend la restriction à l'intersection des domaines de définition.

Définition 1 *La fonction f est dite* **négligeable devant** g **au voisinage de** a*, ss'il existe un voisinage pointé V de a et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ de limite nulle en a, telle que $f = \varepsilon \cdot g$ (dans V). On écrit*

$$f \underset{a}{\ll} g \iff f \underset{(a)}{=} o(g) \overset{def}{\iff} \exists \varepsilon : V \to \mathbb{R} \text{ t.q. } f = \varepsilon \cdot g \text{ et } \lim_a \varepsilon = 0,$$

On appelle $f = o(g)$ la notation de Landau et $f \ll g$ la notation de Hardy.

Exemple 1.1.1 *On a $f = o(1) \iff \lim f = 0$.*

Exemple 1.1.2 *La fonction nulle $o : x \mapsto 0$ est négligeable devant toute fonction en tout point a (prendre $\varepsilon = 0$). D'autre part, $f = o(f) \implies f = \varepsilon \cdot f \iff (1-\varepsilon)f = o \implies f = o$ (car $\lim \varepsilon = 0 \implies (1-\varepsilon) \neq 0$) dans un voisinage de a.*

Remarque 1.1.1 *Alors que la notation de Hardy paraît plus « logique », on utilise dans la pratique plus souvent celle de Landau, car elle permet l'abus de notation très pratique qui consiste à écrire*

$$f(x) = g(x) + o(h(x)) \ (x \to a) \quad \text{au lieu de} \quad f - g \underset{(a)}{=} o(h) \, .$$

Lorsqu'on utilise cette notation, chaque terme $o(h(x))$ représente une fonction quelconque de x, négligeable devant h, mais à priori inconnue et différente d'un éventuel autre terme $o(h(x))$.
On prendra aussi garde de toujours préciser le point auquel la relation de négligence s'applique. Ainsi on peut avoir $f \underset{a}{\ll} g$ mais $g \underset{b}{\ll} f$ pour a, b différents.

Exemple 1.1.3 *Si f est bornée et g tend vers l'infini, alors $f = o(g)$.*

Exemple 1.1.4 *On a $x^m \underset{(\infty)}{=} o(x^n)$ ssi $m < n$ (car alors $\varepsilon = x^{m-n} \to 0$), et l'opposé au voisinage de 0.*

Exemple 1.1.5 *On a $x^\alpha \underset{(\infty)}{=} o(e^{\beta x})$ et $(\ln x)^\alpha \underset{(\infty)}{=} o(x^\beta)$ $(x \to \infty)$ pour tout $\alpha, \beta > 0$. (Exercice : pourquoi ?)*

La proposition suivante permet de trouver autant d'exemples que l'on souhaite :

Proposition 2 *Si la fonction f/g est définie dans un voisinage pointé de a, alors $f \underset{a}{=} o(g) \iff \lim_a f/g = 0$.*

Démonstration : Exercice. (Il suffit d'utiliser $\varepsilon = f/g$).□

Remarque 1.1.2 *Le seul cas ou f/g n'est pas défini dans un voisinage de a est celui ou g a une infinité de zéros dans chaque voisinage (c'est-à-dire aussi près que l'on veut) de a, par exemple pour $g(x) = h(x).\sin\frac{1}{x-a}$.*

Proposition 3 *La relation $\ll$ est transitive,*

$$f \underset{a}{\ll} g,\ g \underset{a}{\ll} h \Longrightarrow f \underset{a}{\ll} h\ ,$$

et compatible avec la multiplication, c'est-à-dire

$$f \underset{a}{\ll} g \Longrightarrow f.h \underset{a}{\ll} g.h\ ,\ \text{et}\ \ f \underset{a}{\ll} g, h \underset{a}{\ll} k \Longrightarrow f.h \underset{a}{\ll} g.k$$

pour toutes fonctions $f, g, h, k : V \to \mathbb{R}$.

Démonstration : Exercice. (Il suffit de substituer $f = \varepsilon_1.g$, $g = \varepsilon_2.h$, etc.)□

Remarque 1.1.3 *Attention : la relation $\ll$ n'est pas compatible avec l'addition ! Par exemple, $x \underset{\infty}{\ll} x^3$ et $x^2 \underset{\infty}{\ll} -x^2$, mais $x + x^2 \not\ll x^3 + (-x^2) = o$.*

Remarque 1.1.4 *Dans la pratique, on utilise donc la notation $o(g)$ (voire $o(g(x))$) pour représenter une fonction f quelconque, à priori inconnue, telle que $f \ll g$. On écrit ainsi par exemple $x^n o(x^m) = o(x^{n+m})$, $o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\max(m,n)})$ $(x \to \infty)$...*

Attention : Il convient de garder en mémoire que le symbole $o(.)$ correspond, chaque fois qu'il apparaît, à une **nouvelle** *(autre) fonction ε. On a ainsi par exemple $o(\lambda f(x)) = o(f(x))\ \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$, mais $o(f(x)) = o(\lambda f(x))$ seulement $\forall\lambda \in \mathbb{R}^*$.*
Noter aussi que pour $m > n$, $o(x^n) = o(x^m)$ ($x \to \infty$), mais malgré cette « égalité », $o(x^m) \neq o(x^n)$!

1.2 Fonctions équivalentes

Définition 4 *On dit que f est équivalent à g au voisinage de a ssi $f - g$ est négligeable devant g ; on écrit*

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{\ll} g\ .$$

Proposition 5 *Si f/g est défini dans un voisinage pointé de a, alors $f \sim g \iff \lim f/g = 1$.*

Démonstration : Exercice (utiliser la déf. pour m.q. $f = (1 + \varepsilon)g$).□

Remarque 1.2.1 *La présente définition de fonctions équivalentes est donc plus générale que celle en terme de limite, car elle s'applique aussi dans les cas ou f/g n'est pas bien défini, voir Rem. 1.1.2.*

Proposition 6 *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire elle est reflexive ($f \sim f$), symétrique ($f \sim g \Longrightarrow g \sim f$) et transitive :*

$$f \sim g \text{ et } g \sim h \implies f \sim h\ .$$

Démonstration : Exercice (encore avec $f = (1 + \varepsilon)g$ etc.).□

Proposition 7 (limites) *Si $f \sim g$, alors $\lim g$ existe ssi $\lim f$ existe, et si elles existent, ces deux limites sont égales.*

Proposition 8 (produit, quotient, puissance) *On peut prendre le produit, quotient (lorsqu'il est défini) et une puissance quelconque d'équivalences .*

Démonstration : Exercice (avec $f = (1+\varepsilon)g$ etc.).$\square$

Remarque 1.2.2 *Dans le cas général, on ne peut additionner des équivalences :* $f(x) = x^2 - x \underset{0}{\sim} -x, g(x) = x \underset{0}{\sim} x$ *mais* $f + g \not\sim 0$.

Proposition 9 (composée) *Soit* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *t.q.* $\lim_b \varphi = a$ *alors* $f \circ \varphi \underset{b}{\sim} g \circ \varphi$.

Démonstration : exercice (comme avant, on trouve $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \circ \varphi \to 0$).$\square$

Proposition 10 (comment trouver des équivalents)
i) $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)$ *si* $f'(a) \neq 0$
ii) $f \sim g > 0 \Longrightarrow \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$*, pour* g *continue dans un voisinage (pointé) de* a.

Démonstration : D'après la définition, si $\lim f = c \in \mathbb{R} \setminus 0$, alors $f - c = o(1) = o(c)$, donc $f \sim c$. Utilisons ceci avec la définition de la dérivée : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \sim f'(a)$, et en multipliant cette équivalence par $x - a$, il vient le (i).
Le (ii) est équivalent à $f - g = o(g) \Longrightarrow \int_a^x (f-g) = o(\int_a^x g)$. Montrons que $h = o(g) \Longrightarrow \int_a^x h = o(\int_a^x g)$. Soit donc $h = \varepsilon g$; on a $\frac{|\int \varepsilon g|}{\int g} \leq \frac{\max|\varepsilon|.\int g}{\int g}$. Or, $\varepsilon \to 0 \Longrightarrow \max_{[a,x]} |\varepsilon| \to 0$, donc $\frac{|\int \varepsilon g|}{\int g} \to 0$ et $\int_a^x h = o(\int_a^x g)$.$\square$

1.3 Développements limités : définition et propriétés

Les développements limités consistent *grosso modo* à trouver une approximation polynômiale à une fonction plus compliquée, au voisinage d'un point choisi. Ils ont de nombreuses applications dans d'autres sciences (physique,...), mais aussi dans les mathématiques elles-mêmes, en particulier en analyse numérique.

1.3.1 D.L. d'ordre n en x_0

Définition 11 *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un $DL_n(x_0)$ ssi il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ t.q.*

$$\forall x \in I : f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad \textit{et} \quad \lim_{x_0} \varepsilon = 0 \; .$$

On appelle alors $P(x-x_0)$ la partie régulière du DL, et $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ le reste d'ordre n, que l'on note aussi $o((x - x_0)^n)$.

Exemple 1.3.1 (fondamental) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 \frac{x}{1-x}$*, donc f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ et de reste $x^3\,\varepsilon(x) = x^3 \frac{x}{1-x}$.*

Remarque 1.3.1 *On permet le cas $x_0 \notin I$, mais les seuls cas utiles sont ceux ou $x_0 \in \overline{I}$ (adhérence de I), par exemple $I = [a, b] \setminus \{x_0\}$ ou $I =]x_0, b[$.*

Remarque 1.3.2 *Il faut insister sur le fait qu'un développement limité est une stricte égalité mathématique, il ne faut donc jamais « oublier » le reste en faveur de la partie régulière. D'ailleurs, dans certains cas le reste peut être plus intéressant que la partie régulière.*

Remarque 1.3.3 *Comme la formule simplifie pour $x_0 = 0$, on se ramène souvent à ce cas en considérant $g(t) = f(x_0+t)$, c'est-à-dire en faisant un changement de variables $x = x_0 + t$, puis un $DL(t = 0)$, dans lequel on resubstitue finalement $t = x - x_0$.*

Corollaire 12 (Conséquences de la définition.) — *On se limite ici aux cas ou I est un intervalle, éventuellement privé du point x_0.*

- *Si f admet un DL en $x_0 \in \overline{I}$, alors f admet une limite en x_0, égale à $a_0 = P(0)$. Si $x_0 \in I$, cela implique que f est continue en x_0. Sinon, f admet un prolongement par continuité en x_0 (en posant $\widetilde{f}(x_0) = a_0$), dont le DL coïncide avec celui de f.*
- *Si f admet $DL_n(x_0)$, $n \geq 1$ et $x_0 \in I$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1 = P'(0)$.*

Exemple 1.3.2 *Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = x^{n+1} \sin x^{-k}$ n'est pas définie en 0 mais admet un $DL_n(0)$ (de partie régulière nulle et avec $\varepsilon = x \sin x^{-k}$) et donc une limite (nulle) et donc un prolongement par continuité en 0. Pour $n \geq 1$, ce prolongement $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 (2^e partie du corrolaire) (avec $\widetilde{f}'(0) = 0$), mais la dérivée n'est pas continue en 0 si $n \leq k$: en effet $f'(x) = (n+1)x^n \sin x^{-k} - k\, x^{n-k} \cos x^{-k}$ $(x \neq 0)$ n'admet pas de limite en 0 pour $n \leq k$.*

Remarque 1.3.4 *L'exemple précédent montre que même si f admet un DL à un ordre aussi élevé qu'on veut, cela n'implique jamais que la dérivée soit continue, et donc encore moins que la fonction soit deux fois dérivable ! (Prendre $k = n$ arbitrairement grand dans l'exemple 1.3.2.)*

1.3.2 Unicité du D.L.

Lemme 13 (troncature) *Si f admet un $DL_n(x_0)$ de partie régulière P, alors f admet $DL_m(x_0)$ $\forall m \in \{0, ..., n\}$, dont la partie régulière sont les termes de degré $\leq m$ de P.*

<u>Démonstration :</u> Exercice facile : il suffit de montrer que les termes $a_k(x - x_0)^k$ avec $k > m$ peuvent s'écrire comme reste d'ordre m :

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x) = (x - x_0)^m \eta(x)$$

avec

$$\eta = \sum_{k=m+1}^{n} a_k(x - x_0)^{k-m} + (x - x_0)^{n-m} \varepsilon(x) \to 0 \ \ (x \to x_0) \ .$$

□

Théorème 14 (unicité) *Si f admet un DL, il est unique, c'est-à-dire P et ε sont uniques.*

<u>Démonstration :</u> (par recurrence). Pour $n = 0$, $P = a_0 = \lim_{x_0} f$ et $\varepsilon(x) = f(x) - a_0$ sont déterminés de façon unique. Supposons que le $DL_n(x_0)$ de f est unique, et que f admet un $DL_{n+1}(x_0)$, $f = \sum_0^{n+1} a_i(x - x_0)^i + (x - x_0)^{n+1}\varepsilon(x)$. D'après le Lemme qui précède, $a_0 + ... + a_n(x - x_0)^n + (x - x_n)^n \eta(x)$ avec $\eta(x) = a_{n+1}(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ est un $DL_n(x_0)$ de f. D'après l'hypothèse de récurrence, $a_0, ..., a_n$ ainsi que le reste η sont uniques. Or, $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\eta(x) = a_{n+1}$. Ce coefficient, et $\varepsilon = \frac{1}{x - x_0}\eta(x) - a_{n+1}$ sont donc également uniques.□

Remarque 1.3.5 *Autre démonstration : soit $f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) = Q(x - x_0) + (x - x_0)^n \eta(x)$, avec $P = a_0 + ... + a_n X^n$ et $Q = b_0 + ... + b_n X^n$. En considérant $\lim(x \to x_0)$ de l'équation précédente, on a $a_0 = b_0$. Si $n > 0$, on peut alors soustraire $a_0 = b_0$ de cette équation, la diviser par $(x - x_0)$ (pour $x \neq x_0$), et on repart du début avec une équation du même type mais avec n diminué d'un rang, de laquelle on déduit $a_1 = b_1$, etc... Quand enfin on arrive à $n = 0$, ayant identifié le* *terme constant et soustrait des deux membres, l'équation devient $\varepsilon(x) = \eta(x)$, d'où également l'unicité des restes.*

Corollaire 15 *f paire (par rapport au pt. x_0) $\Longrightarrow P$ pair, c'est-à-dire $P = P(-X) \iff P = \frac{1}{2}(P + P(-X)) \iff P = a_0 + a_2X^2 + ... + a_{2k}X^{2k}$.*

Démonstration : f paire $\iff f(x_0 + t) = f(x_0 - t)$, donc $P(t) = P(-t)$ (en comparant partie régulière du $DL(x_0)$ de f et de $f(x_0 - (x - x_0))$).□

1.3.3 Existence des D.L. — Formules de Taylor

Dans ce paragraphe, on affirme l'existence du D.L. pour les fonctions suffisament dérivables, et on précise en même temps une expression explicite des coefficients de la partie régulière en terme des dérivées de la fonction au point du D.L.

Théorème 16 (de Taylor–Lagrange) *Si f est $n+1$ fois continûment dérivable sur $[x_0, x]$, alors f admet un $DL_n(x_0)$ de partie régulière*

$$P = f(x_0) + f'(x_0)\,X + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,X^n \,.$$

(de coefficient $a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$), avec le **reste de Lagrange** *d'ordre n,*

$$\exists c \in \,]x_0, x[\,: \; f(x) - P(x - x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1} \,.$$

Remarque 1.3.6 *A titre mnemotechnique, le reste d'ordre n a donc la même expression qu'un terme d'ordre $n + 1$ de la partie régulière, sauf que le « coefficient » n'est pas une constante dans la mesure ou le point c ci-dessus dépend de x.*

Démonstration : Avec l'hypothèse de ce théorème, nous avons déjà démontré la formule de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a) + ... + \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)\,(x - a)^n + R_n(f, a, x)$$

avec le reste intégral d'ordre n,

$$R_n(f, a, x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x - t)^n\,\mathrm{d}t \,,$$

dans le chapitre **??** (page **??**), comme application de l'intégration par parties. Pour que cette formule corresponde effectivement à un D.L., il faut montrer que $R_n(f,a,x)$ est négligeable devant $(x-a)^n$, lorsque $x \to a$. Pour cela, utilisons le théorème **??** de la moyenne généralisée, avec $g(t) = (x-t)^n > 0$ pour $t \in]a,x[$. Il existe donc $c \in]a,x[$ tel que

$$R_n(f,a,x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c) \int_a^x (x-t)^n \,\mathrm{d}t \ .$$

Cette dernière intégrale vaut

$$\left[\frac{-1}{n+1}(x-t)^{n+1}\right]_a^x = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} \ ,$$

d'où la formule du reste de Lagrange (avec $a = x_0$).
f^{n+1} étant continue donc bornée sur $]a,b[$, on a que $R_n(f,a,x)/(x-a)^n$ tend vers zéro, c'est à dire $R_n(f,a,x) = o(x-a)^n$.□

Remarque 1.3.7 *On peut montrer que le théorème reste vrai sous la condition moins forte que $f^{(n)}(x_0)$ existe et f soit $n+1$ fois dérivable sur $]x_0,x[$.*
Par exemple, $f(x) = \sqrt{x}$, admet un $DL_0(0)$ de partie régulière nulle et de reste $R_0(f,0,x) = \sqrt{x} = o(x^0)$. La dérivée $f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-1/2}$ n'est pas définie en 0, mais le reste peut néanmoins s'exprimer comme $f'(\xi).x$ avec $\xi = \frac{1}{4}x$.
La formule avec reste intégral reste en effet vraie dans ces conditions, mais le $R(f,a,x)$ est en général une intégrale impropre, définie comme $\int_a^x \ldots \mathrm{d}t = \lim_{w\to a} \int_w^x \ldots \mathrm{d}t$, qui converge (C'est à dire cette limite existe et elle est finie), car la primitive s'exprime en termes de $f^{(n)}$ qui est continue par hypothèse.
(Dans l'exemple précédent, on a l'intégrale impropre $\int_0^x t^{-1/2}\,\mathrm{d}t$ qui converge car la primitive $2\sqrt{x}$ admet une limite en 0.)

Remarque 1.3.8 *Dans le cas particulier (mais fréquent) où $x_0 = 0$, et en posant $c = \theta\, x$ avec $\theta \in [0,1]$, la formule de Taylor-Lagrange s'appelle* **formule de MacLaurin** *:*

$$\exists \theta \in]0,1[\ :\ f(x) = f(0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta\, x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \ .$$

Une autre version de la formule de Taylor, nécessitant une hypothèse moins forte, mais donnant un résultat plus faible, est le

Théorème 17 (Taylor–Young) *Si $f^{(n)}(x_0)$ existe, alors f admet $DL_n(x_0)$ de partie régulière*

$$P = f(x_0) + f'(x_0)\, X + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, X^n \ .$$

Nous en admettons ici la démonstration, on peut p.ex. consulter [Ramis & al, Cours de Math Spé, III] .

1.3.4 Application : D.L. de quelques fct élémentaires

En utilisant la formule de Taylor, on obtient les DL(0) des fonctions élémentaires $\exp, \cos, \sin, (1+x)^\alpha$ donnés ci-dessous, où $o(x^n)$ représente une fonction inconnue de la forme $x^n \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
e^x = \exp x &= 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + ... + \frac{1}{n!}\,x^n + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{1}{6}\,x^3 + -... + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\,x^{2\,n+1} + o(x^{2\,n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + -... + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n} + o(x^{2\,n}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}\,x^2 + -... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + ... + \frac{\alpha}{1}.\frac{\alpha-1}{2}.\frac{\alpha-2}{3}\cdots\frac{\alpha-n+1}{n}\,x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

Les fonctions $ch\,x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $sh\,x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ ont comme DL les termes en puissances paires resp. impaires de e^x, ce sont donc ceux de $\cos x, \sin x$, mais avec des signes + partout. (En effet, $\cos x = \Re e\, e^{i.x} = ch(i.x)$ et $\sin x = \Im m\, e^{i.x} = \frac{1}{i} sh(i.x)$.)

1.4 Opérations sur les D.L.

1.4.1 Combinaison linéaire, produit et quotient de D.L.

Proposition 18 *Si f, g admettent des $DL_n(x_0)$ de partie régulière P resp. Q, alors $\lambda f + \mu g$ et $f \cdot g$ admettent des $DL_n(x_0)$ de partie régulière $\lambda P + \mu Q$ resp. des termes de degré $\leq n$ de $P \cdot Q$.*
Si $Q(0) \neq 0$, f/g admet un $DL_n(x_0)$ de partie régulière obtenue par division P/Q selon les puissances croissantes, à l'ordre n.

Démonstration : Il suffit de remplacer f, g par leur D.L. et de développer les expressions. (Exercice : détailler ceci !)□

Exemple 1.4.1 *Obtenir le $DL_5(0)$ de $\tan(x)$ par division des $DL_5(0)$ de $\sin$ et $\cos$.*

Solution : on trouve $(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5) : (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) = \tan x$**.**

1.4.2 Intégration d'un D.L.

Proposition 19 *Si f est dérivable et f' admet un $DL_n(x_0)$, de partie régulière $a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, alors f admet un $DL_{n+1}(x_0)$ de partie régulière $P = f(x_0) + a_0\,X + ... + \frac{a_n}{n+1}\,X^{n+1}$.*

Remarque 1.4.1 *On ne peut en général dériver un DL, même si f dérivable. Ex : $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ admet $DL_1(0)$ mais f' n'a pas de limite en 0 donc pas de DL à aucun ordre.*

1.4.3 Composée de D.L.

Proposition 20 *Si f admet un $DL_n(x_0)$ de partie régulière P et g admet un $DL_n(P(0))$ de partie régulière Q, alors $g \circ f$ admet un $DL_n(x_0)$ de partie régulière obtenue par les termes de degré $\leq n$ de $Q(P)$ (polynôme composé).*

Exemple 1.4.2 $\varphi(x) = (1+x)^x = f \circ g(x)$ *avec* $f(x) = \exp x, g(x) = x\ln(1+x)$.

1.5 Application des D.L. : Etude locale d'une courbe

On considère f définie sur $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ admettant un $DL_p(x_0)$ de partie régulière $P = a_0 + a_1X + a_pX^p$, $p \geq 2$ t.q. $a_p \neq 0$.

Alors la tangente t à la courbe C_f de f a pour équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$, et la position de C_f par rapport à t est donnée par le signe de $a_p(x - x_0)^p$:

1^{er} **cas :** p **pair.** le point $P = (x_0, f(x_0))$ est dit ordinaire

$a_p > 0 \Longrightarrow C_f$ au dessus de t, $a_p < 0 \Longrightarrow C_f$ en-dessous de t,

Si $a_1 = 0 \Longrightarrow$ extremum ; dans ce cas : $a_p > 0 \Longrightarrow$ minimum et f convexe, et $a_p < 0 \Longrightarrow$ maximum et f concave au voisinage de x_0.

2^e **cas :** p **impair.** $P = (x_0, f(x_0))$ est un pt. d'inflexion, C_f traverse t en P.

Convexité et concavité à droite et à gauche de P selon le signe de $a_p(x - x_0)^p$ (cf. ci-dessus).

Exercice 1.5.1 *Faire un dessin représentatif pour chacun des 4 cas possibles (p pair/impair, $a_p > 0$ et $a_p < 0$)*

1.6 D.L. en $\pm\infty$

Définition 21 *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$, $I =]\alpha, \infty[$ (resp. $I =]-\infty, \alpha[$), admet un $DL_n(\infty)$ (resp. $DL_n(-\infty)$) ssi $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ t.q.*

$$\forall x \in I : f(x) = P(\frac{1}{x}) + o(1/x^n) \ \ (x \to \pm\infty)$$

(avec toujours $o(1/x^n)$ une fonction de la forme $\varepsilon(x)/x^n$, $\varepsilon \to 0$).

Donc f admet un $DL_n(\pm\infty)$ ssi $g(t) = f(1/t)$ admet un $DL_n(\pm 0)$; c'est ainsi qu'on détermine dans la pratique les $DL(\pm\infty)$ (même si on n'écrit pas explicitement le changement de variables $t = 1/x$).

Corollaire 22 *Si f admet un $DL(\pm\infty)$, alors f admet une limite finie en $\pm\infty$ (comme dans le cas d'un $DL(a),\ a \in \mathbb{R}$).*

Remarque 1.6.1 *Si f s'écrit comme différence de deux fonctions qui n'admettent pas une limite finie, f peut quand même admettre un $DL(\infty)$ lorsque ces deux fonctions sont équivalentes en l'infini. Pour le trouver, on met en facteur une fonction équivalente (généralement une puissance de x), pour pouvoir faire un D.L. de l'autre facteur (différence de deux DL). Si suffissament de termes des deux DL s'anullent, il est possible que le produit soit un D.L. au sens strict (sinon c'est un* D.L. généralisé*).*

Exemple 1.6.1 *$DL_2(\pm\infty)$ de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - x}$: Séparément les deux racines n'admettent pas de $DL(\infty)$. Or, $f(x) = |x|.(\sqrt{1 - 1/x^2} - \sqrt{1 - 1/x})$, et en utilisant*

$$\sqrt{1 - 1/x} = 1 + \frac{1}{2}(-1/x) - \frac{1}{8}(-1/x)^2 + o(1/x)^2 \ ,$$

on a $f(x) = |x| \cdot (1 + \frac{1}{2}(-1/x^2) + o(1/x^2) - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^2}) = |x|.(\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{3}{8}\frac{1}{x^2} + o(1/x^2))$, En développant, on a $f(x) = sgn(x)(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\frac{1}{x} + o(1/x))$, d'où le résultat cherché.

1.6.1 Application : étude d'une branche infinie en $\pm\infty$

Pour trouver l'asymptote (si elle existe) à la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f, on cherche un $DL_1(\infty)$ de la fonction $g := x \mapsto \frac{1}{x} f(x)$. Si $g(x) = a + b/x + o(1/x)$, alors $f(x) = x\, g(x) = a.x + b + o(1) \ \ (x \to \infty)$, donc la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

Remarque 1.6.2 *On peut renoncer à l'introduction de la fonction g, et faire le « $DL(\infty)$ » directement à partir de la fonction f. Cependant, l'expression $f(x) = a.x + b + o(1) \ \ (x \to \infty)$ n'est pas un $DL(\infty)$ au sens strict de la définition, à cause du premier terme qui n'est pas un polynôme en $1/x$.*

La position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de l'infini se déduit du signe de $f(x) - (a\,x + b)$. Pour le connaître, on peut chercher le prochain terme non-nul dans le $DL(\infty)$ de g. Si $g(x) = a + b/x + a_p/x^p + o(1/x^p)$ avec $a_p \neq 0$, alors on a $f(x) = a \cdot x + b + a_p/x^{p-1} + o(1/x^{p-1})$. Le signe de a_p indique donc la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ : pour $a_p > 0$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$, sinon en-dessous. Le même raisonnement s'applique au voisinage de $-\infty$, en tenant compte du signe de x^{p-1} : ici c'est $\operatorname{sgn} a_p.(-1)^{p-1}$ qui indique si $\mathcal{C}$ est au-dessus ou en-dessous de Δ.

Si la courbe $\mathcal{C}$ a une convexité ou concavité définie au voisinage de $\pm\infty$, est convexe ssi elle est au-dessus de Δ, sinon concave ; c'est tout à fait analogue à l'étude locale en un point $a \in \mathbb{R}$, sauf que l'asymptote joue le rôle de la tangente.

Notons que $\frac{1}{x}f$ peut ne pas admettre de DL_p avec p assez grand pour déterminer la position par rapport à Δ, comme c'est le cas pour $f = x \mapsto x + \frac{1}{x}\sin^2 x$; ici on peut toutefois affirmer que f est au-dessus de Δ : $y = x$.