بسم الله الرحمن الرحيم

السوال الأول:

أولا $x = 1$ جواب للمعادلة؛ ثانيا

$$x\ 2^{1/x} + \frac{1}{x}\ 2^x = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2\ 2^{1/x} + 2^x - 4x = 0$$

$$\mathbf{f}(x) = x^2\ 2^{1/x} + 2^x - 4x$$

$$\frac{d\mathbf{f}}{dx} = \mathbf{f}'(x) = 2x\ 2^{1/x} + x^2(-\frac{1}{x^2}) \ln 2\ 2^{1/x} + \ln 2\ 2^x - 4$$

$$= 2x\ 2^{1/x} + \ln 2 (2^x - 2^{1/x}) - 4$$

$$x > 1 \ \longrightarrow 2^x - 2^{1/x} > 0\ ,\ 2x\ 2^{1/x} > 4\ ^{(\star)} \ \Longrightarrow\ \mathbf{f}' > 0$$

$$(\star) \quad g(t) = 2^{t-1} - t \Rightarrow g'(x) = \ln 2\ 2^{t-1} - 1$$

$$t < 1 \Rightarrow g'(t) < \ln(2) - 1 < 0$$

$$\Rightarrow g(t) : decreasing \Rightarrow g(t) > g(1) \ \Rightarrow 2^{t-1} - t > 0$$

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow \ 2^{1/x-1} - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow 2^{1/x} > \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow 2x\ 2^{1/x} > 4 \qquad (x > 1)$$

$$\mathbf{f}' > 0 \Rightarrow \mathbf{f} : increasing \rightarrow x > 1 \Rightarrow \mathbf{f}(x) > \mathbf{f}(1)$$

$$\Rightarrow x^2\ 2^{1/x} + 2^x - 4x \ > \ 2 + 2 - 4 = 0$$

لذا ليس للمعادلة جواب عندما $x > 1$

اذا $x < 1$:

$$\mathbf{f}(\frac{1}{x}) = \mathbf{f}(x)$$

$$x < 1 \ \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \mathbf{f}(\frac{1}{x}) > 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{f}(x) > 0$$

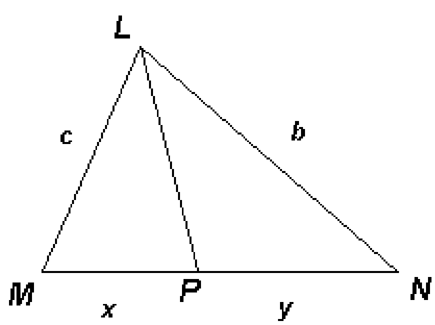
فليس للمعادلة جواب عندما $x < 1$

فليس لها جواب الا x=1

السوال الثاني:

$$I = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}\ dx$$
$$(t = x-1) \Rightarrow I = \int \frac{1}{t\sqrt{-t(t-1)}}\ dt$$
$$t(t-1) < 0 \Rightarrow 0 < t < 1$$
$$I = \int \frac{1}{t^{3/2}\sqrt{1-t}} dt$$
$$u = \frac{1}{t}\ , dt = -\frac{du}{u^2} \Rightarrow I = \int -\frac{1}{\sqrt{u-1}} du$$
$$= -\int (u-1)^{-1/2} du = -2\sqrt{u-1}$$
$$= 2\sqrt{\frac{1}{t} - 1} = -2\sqrt{\frac{1}{x-1} - 1}$$

السوال الثالث:



$$xb^2 + yc^2 = (x+y)(m^2+xy)$$
$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}\ \Rightarrow xb = yc$$
$$ycb + xbc = (x+y)(m^2+xy)$$
$$bc(x+y) = (x+y)(m^2+xy)\ \Rightarrow m^2 = bc - xy$$
$$LP^2\ =\ LN * LM\ -\ PM * PN$$

السوال الرابع:

$$2007 \equiv 7 \mod 100$$
$$\Rightarrow 2007^{2007} \equiv 7^{2007} = (7^4)^{501} * 7^3 = (2401)^{501} * 343$$
$$2401 \equiv 1\ ,\ 343 \equiv 43\ \Rightarrow (2401)^{501} * 343 \equiv 1^{501} * 43 = 43$$
$$2007^{2007} \equiv \mathbf{43} \mod 100$$

الخانتان الأخيرتان من العدد هما ٤ و ٣ .

السوال الخامس:
ان كان $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $f(p) = f(q)$ اذا
$a(p-q)(p+q) + b(p-q) = 0$ لذا $p = q$ او $p + q = -\frac{b}{a}$
ان كان $f(p) = f(q) = f(r)$ و $f(x) = ax^2 + bx + c$ يوجد بينها عددان مساويان. لو $p \neq q$ و $q \neq r$:

$$p + q = -\frac{b}{a}\ ,\ p + r = -\frac{b}{a} \Rightarrow p = r$$

لذا في الأعداد $f(1), f(2), f(3)$ عددان مساويان.
و لا يمكن ان $f(1) = f(2) = f(3)$ ؛ لأنه يجب أن يوجد في الآعداد ١،٢و٣ عددان مساويان. اذا
$f(1) = f(2) \neq f(3)$ أو $f(2) = f(3) \neq f(1)$ أو $f(3) = f(1) \neq f(2)$.

$$\mathbf{1})\ \ f(1) = f(2) \neq f(3) \Rightarrow 1 + 2 = -\frac{b}{a}\ \Rightarrow b = -3a$$
$$f(1) + f(3) = -\frac{b}{a} \Rightarrow (a + b + c) + (9a + 3b + c) = 3$$
$$\Rightarrow 10a + 4b + 2c = 3 \Rightarrow 10a - 12a + 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} + a$$
$$\Rightarrow \mathbf{f(x) = ax^2 - 3ax + \frac{3}{2} + a}$$

$$\mathbf{2})\ \ f(2)=f(3)\neq f(1)\Rightarrow 2+3=-\frac{b}{a}\ \ \Rightarrow b=-5a$$

$$f(1)+f(3)=-\frac{b}{a}\Rightarrow (a+b+c)+(9a+3b+c)=5$$

$$\Rightarrow 10a+4b+2c=5\Rightarrow 10a-20a+2c=5\Rightarrow c=\frac{5}{2}+5a$$

$$\Rightarrow \mathbf{f(x)=ax^2-5ax+\frac{5}{2}+5a}$$

$$\mathbf{3})\ \ f(3)=f(1)\neq f(2)\Rightarrow 3+1=-\frac{b}{a}\ \ \Rightarrow b=-4a$$

$$f(1)+f(2)=-\frac{b}{a}\Rightarrow (a+b+c)+(4a+2b+c)=4$$

$$\Rightarrow 5a+3b+2c=4\Rightarrow 5a-12a+2c=4\Rightarrow c=2+\frac{7}{2}a$$

$$\Rightarrow \mathbf{f(x)=ax^2-4ax+2+\frac{7}{2}a}$$