Language : Arabic(Saudi Arabia)

الأربعاء 25 يوليو 2007

السؤال الأول

لتكن $a_1, a_2, ..., a_n$ أعداداً حقيقية معطاة . لكل i ($1 \le i \le n$) نعرِّف .

$$d_i = \max\{ a_j : 1 \le j \le i \} - \min\{ a_j : i \le j \le n \}$$

حيث $\max$ تعني أكبر ، و $\min$ تعني أصغر ، و لتكن $d = \max\{ d_i : 1 \le i \le n \}$.

1) برهن أنه لأي الأعداد الحقيقية $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ فإن :

$\max\{ |x_i - a_i| : 1 \le i \le n \} \ge \frac{d}{2}$. حيث الرمز $|\ |$ يعني القيمة المطلقة .

2) بين أنه توجد أعداد حقيقية $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ بحيث يكون $\max\{ |x_i - a_i| : 1 \le i \le n \} = \frac{d}{2}$.

السؤال الثاني

لتكن A و B و C و D و E خمس نقاط بحيث $ABCD$ متوازي أضلاع و $BCED$ رباعي دائري .

وليكن (ℓ) مستقيماً يمر من النقطة A ويقطع داخلياً القطعة المستقيمة $[CD]$ في F ويقطع المستقيم (BC) في G .

نفترض أن $EF = EG = EC$ ، بين أن (ℓ) هو منصف الزاوية $\widehat{DAB}$.

السؤال الثالث

يشارك عدد من الطلاب في مسابقة للرياضيات ، بعضهم أصدقاء و نفترض أنه إذا كان الطالب A صديقا للطالب B فإن B يكون كذلك صديقا للطالب A .

سوف نقول أن مجموعة من هؤلاء الطلاب تشكل ***فريقًا*** إذا كان كل اثنين من عناصر***الفريق*** أصدقاء (وعلى وجه الخصوص كل مجموعة يقل عدد عناصرها عن اثنين هي فريق)

عدد عناصر كل فريق يسمى **حجم** الفريق .

و في هذه المسابقة نعلم أن أكبر حجم للفريق المكون من هؤلاء الطلاب هو عدد زوجي . برهن أنه يمكن توزيع كل هؤلاء الطلاب على غرفتين بحيث يكون أكبر حجم للفريق المتواجد في الغرفة الأولى يساوي أكبر حجم للفريق المتواجد في الغرفة الأخرى .

مدة الاختبار : أربع ساعات و نصف

تمنح 7 درجات لكل سؤال

Language : Arabic(Saudi Arabia)

الخميس 26 يوليو 2007

السؤال الرابع :

ليكن ABC مثلثاً ، منصف الزاوية $\widehat{BCA}$ يقطع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC مرة أخرى في النقطة R و يقطع العمود المنصف للقطعة المستقيمة $[BC]$ في P و يقطع العمود المنصف للقطعة المستقيمة $[AC]$ في Q . ليكن K منتصف $[BC]$ و L منتصف $[AC]$.

برهن أن المثلثين RQL و RPK لهما المساحة نفسها.

السؤال الخامس :

بفرض أن a و b عددان صحيحان موجبان .

بين أنه إذا كان $4ab-1$ يقسم $\left(4a^2-1\right)^2$ فإن $a=b$.

السؤال السادس :

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً . لنعتبر $S=\{(x,y,z):x,y,z\in\{0,1,\ldots,n\},\ x+y+z>0\}$ كمجموعة من $(n+1)^3-1$ نقطة من الفراغ (الفضاء) الثلاثي .

حدد أصغر عدد ممكن من المستويات بحيث يكون اتحادها يتضمن S و لا يحتوي على النقطة $(0,0,0)$.

مدة الاختبار : أربع ساعات و نصف

تمنح 7 درجات لكل سؤال